

Simulation dynamischer Effekte durch numerische Lösung von Differentialgleichungen

Andre Krause

Bielefeld, 04.12.2002

1 Einführung

Viele physikalische Effekte, wie die Bewegung eines Körpers im Schwerfeld der Erde, das Laden eines Kondensators oder die Schwingung eines harmonischen Oszillators lassen sich durch Differentialgleichungen beschreiben. Diese Differentialgleichungen sind zudem recht einfach numerisch zu lösen, während dies für eine analytische Lösung für Differentialgleichungen höherer Ordnung und Differentialgleichungssysteme in der Regel nicht zutrifft. Deshalb basieren viele Dynamiksimulationen auf der numerischen Lösung solcher Differentialgleichungen. zunächst soll erläutert werden, was eine Differentialgleichung ist, es werden einige Beispiele von einfachen Differentialgleichungen aufgeführt und auf numerische Stabilitätsprobleme hingewiesen.

1.1 Der Differentialquotient (Die Ableitung)

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ berechnet deren Anstieg im Punkt x . Dieser Anstieg entspricht der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkte x (s. Abb. 1). Die Ableitung einer einfachen Funktion kann sowohl analytisch mit Hilfe der 4 Ableitungsregeln als auch numerisch durch Bildung des Differentialquotienten berechnet werden.

1.2 Definition des Differentialquotienten

$$\dot{y} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Alternativ kann man auch schreiben:

$$\dot{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Offensichtlich ist, daß h nicht Null sein darf. Dies ist bei der numerischen Berechnung der Ableitung zu beachten, da es hier aufgrund der begrenz-

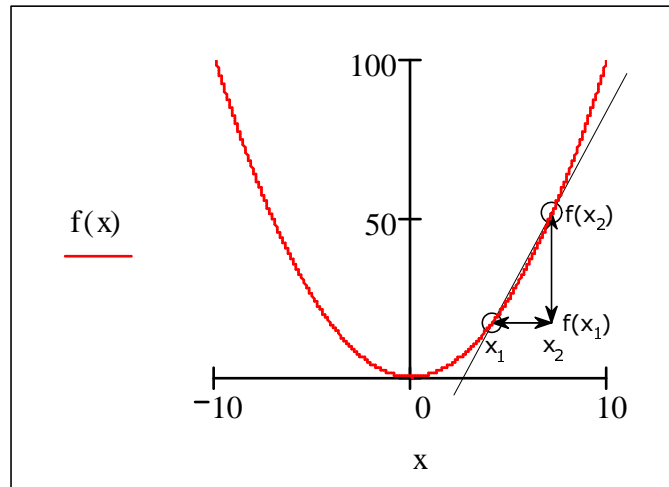


Abbildung 1: Bedeutung des Differentialquotienten. Im Limes $x_2 \rightarrow x_1$ geht die Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ in die Tangente an den Punkt $(x_1, f(x_1))$ über.

ten Genauigkeit von Gleitkommazahlen schnell zu einer Division durch Null kommen kann (*Überlauf*).

Viele physikalische Formeln liegen allerdings schon in Form von Ableitungen vor, welche die Änderung einer physikalischen Größe wie z.B. der Position oder Geschwindigkeit in Abhängigkeit z.B. von der Zeit beschreiben. Hier ist nun die Funktion selbst gesucht, zu bestimmen durch Integration der Ableitung.

1.3 numerische Integration

Die numerische Integration soll mit einem Beispiel motiviert werden. Gegeben sei die einfache Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$\dot{f}(x) = \dot{y} = 2x$$

Abbildung 2 zeigt das Richtungsfeld der Ableitung. Wählt man sich einen Startpunkt $(x, y = c)$ in diesem Richtungsfeld, so braucht man nur in kleinen Schritten den Richtungspfeilen folgen und erhält die Funktion

$$f(x) = y = x^2 + c$$

Die numerische Integration nähert also durch möglichst kleine Schritte die exakte analytische Lösung des Integrals an.

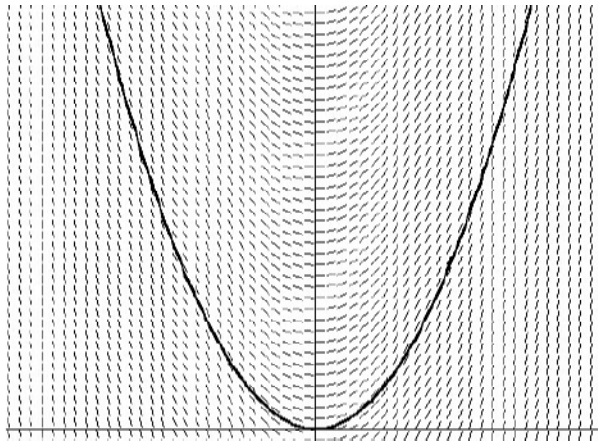


Abbildung 2: Richtungsfeld der Ableitung $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$. Auf der Abszisse ist x abgetragen, auf der Ordinate $y = f(x)$. In jedem Punkt (x, y) ist über die Ableitung eine Steigung definiert, dargestellt über die kleinen Pfeile. Folgt man den Pfeilen, führt man implizit eine numerische Integration durch.

$$f(x) = \int \dot{f}(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \dot{f}(x) \Delta x$$

Diese einfache numerische Lösung durch kleine Schritte konstanter Weite wird auch *Euler-Methode* genannt. Mit steigender Schrittweite steigt auch der numerische Fehler, diese können sich recht schnell aufsummieren und eine numerische Simulation destabilisieren. Abhilfe schaffen numerische Integrationsverfahren höherer Ordnung (midpoint, Runge-Kutta) und eine adaptive Schrittweite.

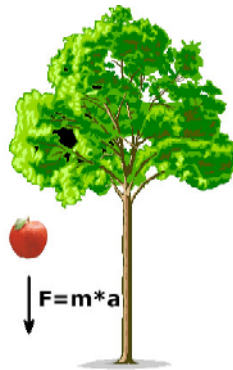
1.3.1 Beispiel: Dynamik eines Massepunktes

Die Dynamik behandelt die Bewegung von Körpern aufgrund äußerer einwirkender Kräfte. Die Bewegung von massebehafteten Körpern folgt den drei Newtonschen Axiomen:

1.3.2 1. Newtonsche Axiom:

Ohne äußere Krafteinwirkung verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung.

Diese Eigenschaft aller Körper wird auch *Trägheit* genannt.

Abbildung 3: 2. Newtonsches Gesetz - **Kraft = Masse x Beschleunigung**

1.3.3 2. Newtonsches Axiom:

Die wirkende Kraft und die erzielte Beschleunigung sind einander proportional.

daraus leitet sich die fundamentale Formel

$$F = ma$$

ab, auf der alle Dynamiksimulationen basieren.

1.3.4 3. Newtonsches Axiom:

Übt ein Körper auf einen anderen eine Kraft aus, so erfährt er von diesem eine entgegengerichtet gleiche Kraft. Kräfte treten also immer paarweise auf.

Das dritte Newtonsche Axiom besagt, daß die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Körpern gleich groß und entgegengesetzt sind (**actio = reactio**).

Formel 1.3.3 stellt aber nichts anderes als eine zweifache Ableitung des Ortes nach der Zeit dar, da die Beschleunigung gleich der Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit, $a = \dot{v} = dv/dt$ und die Geschwindigkeit gleich der Änderung des Ortes mit der Zeit ist, $v = \dot{x} = dx/dt$. Anders geschrieben:

$$\ddot{x} = a = \frac{F}{m} \quad (1)$$

Zu beachten sei hier, daß die abhängige Variable nun nicht mehr y , sondern x und die unabhängige Variable t anstatt x ist. Um nun die Abhängigkeit des Ortes x von der Zeit t zu ermitteln, genügt eine zweifache (numeri-

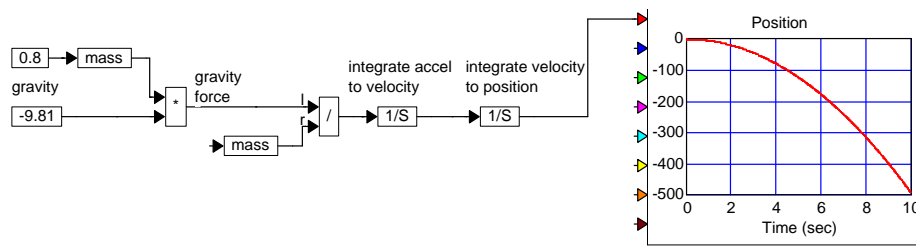


Abbildung 4: Bewegung eines Massepunktes unter Einwirkung der Erdgravitation.

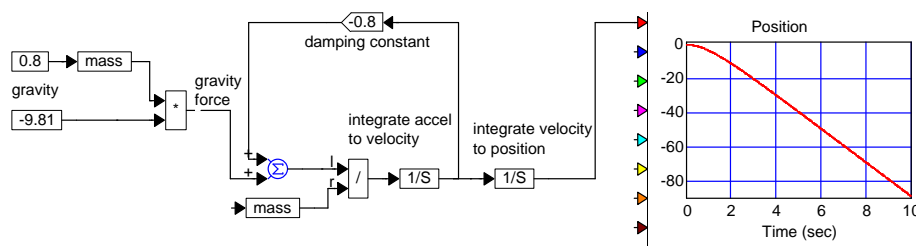


Abbildung 5: Bewegung eines Massepunktes unter Einwirkung der Erdgravitation und unter Berücksichtigung der Luftreibung, welche proportional der Geschwindigkeit ist.

sche) Integration obiger Formel. Dies wird exemplarisch mit Hilfe des Simulationspaketes **Vissim** vorgeführt. Abbildung 4 zeigt das Block-Diagramm. Die Kraft F , hervorgerufen durch die Erdgravitation, wird zweifach integriert und die resultierende Position x geplottet. Nun ist diese Simulation nicht besonders realistisch, schliesslich wirkt im freien Fall auch noch die Luftreibung. Die Luftreibung entsteht durch den Aufprall der Luft-Teilchen auf den Körper, wodurch nach dem 3. Newtonschen Axiom Kräfte entgegengesetzt der Bewegungsrichtung entstehen. Weiterhin sind die Luftreibungskräfte proportional der Geschwindigkeit des fallenden Körpers. Die entstehenden Reibungskräfte können also recht einfach durch

$$F_r = -kv$$

beschrieben werden. k ist dabei der Reibungskoeffizient, welcher z.B. von der Oberfläche des Körpers und der Lufttemperatur abhängt. Es ergibt sich nun die neue Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} - k\dot{x}$$

Dies ist nun aber schon eine Differentialgleichung ! Warum ? Deutlicher wird dies, wenn man sich anstelle von \dot{x} die Geschwindigkeit v denkt:

$\dot{v} = dv/dt = F/m - kv$. Eine Differentialgleichung enthält also neben Ableitungen der abhängigen Variable auch die abhängige Variable selbst. Diese Abhängigkeit erschwert die Lösung, einfaches Integrieren genügt nun nicht mehr. Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Die Ordnung gibt den höchsten Grad der vorkommenden Ableitungen an. Differentialgleichungen bis zur Ordnung 2 sind oft noch analytisch lösbar, während dies für höhere Ordnungen im allgemeinen nicht mehr der Fall ist.

Einfache lineare, homogene¹ Differentialgleichungen ersten Grades, wie sie häufig in der Physik vorkommen, lassen sich analytisch mit Hilfe der e -Funktion lösen. Gegeben die Diff.gleichung:

$$\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

setzt man folgende Lösung an:

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \quad (3)$$

Ableitung der vermutlichen Lösung:

$$\dot{x} = -kx_0 e^{-kt}$$

Einsetzen der vermuteten Lösung und ihrer Ableitung in 2 ergibt:

$$-kx_0 e^{-kt} + kx_0 e^{-kt} \stackrel{?}{=} 0$$

Da dies wahr ist, ist 3 die korrekte Lösung der Differentialgleichung. Inhomogene und nichtlineare Differentialgleichungen sind weitaus komplizierter zu lösen, siehe dazu [For84]

Abbildung 5 zeigt das Blockschaltbild mit Luftreibung. Man erkennt, daß aufgrund der Luftreibung nach kurzer Zeit die Bewegungsgeschwindigkeit konstant bleibt, da sich die Gravitationskraft mit der Reibungskraft aufhebt und so keine weitere Beschleunigung stattfindet.

2 Beispiele

Im folgenden werden einfache Differentialgleichungen beispielhaft anhand eines Tiefpasses und eines harmonischen Oszillators numerisch gelöst (simuliert).

2.1 Tief - und Hochpass

Abbildung 6 zeigt einen einfachen Tiefpass. Ist der Kondensator mit Kapazität C entladen, so fließen, behindert durch den Widerstand R , Ladungsträger (Elektronen) in den Kondensator, welcher dadurch langsam aufgeladen wird. Die Menge an Ladungsträgern, die ein Kondensator aufnehmen

¹eine Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ ist linear, falls $a(t)$ eine lineare Funktion ist und homogen, falls $b(t) = 0$.

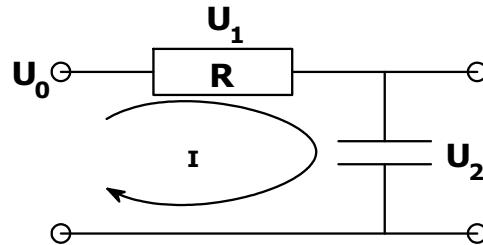


Abbildung 6: Einfacher Tiefpass. Der Stromfluss I erzeugt über dem Widerstand R und dem Kondensator C einen Spannungsabfall U_1 und U_2 . Die Summe beider Spannungen ist gleich U_0 .

kann, hängt von seiner Kapazität (C) und der anliegenden Spannung (U_2) ab:

$$Q = C \cdot U$$

Die fließenden Ladungsträger erzeugen einen Stromfluss, welcher um so grösser ist, je mehr Ladungsträger pro Zeiteinheit fließen:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Dieser Stromfluss erzeugt nun einen Spannungsabfall am Widerstand,

$$U_1 = R \cdot I$$

und ein ansteigen der Spannung über dem Kondensator:

$$U_2 = \frac{Q}{C}$$

Da Kondensator und Widerstand in Reihe geschaltet sind, liegt ein Spannungsteiler vor. Das bedeutet, daß die Summe aus U_1 und U_2 gleich der äußeren anliegenden Spannung U_0 ist. Wir können also zusammenfassen:

$$U_1 = U_0 - U_2$$

⇔

$$R \cdot I = U_0 - \frac{Q}{C}$$

⇔

$$R \frac{dQ}{dt} = U_0 - \frac{Q}{C}$$

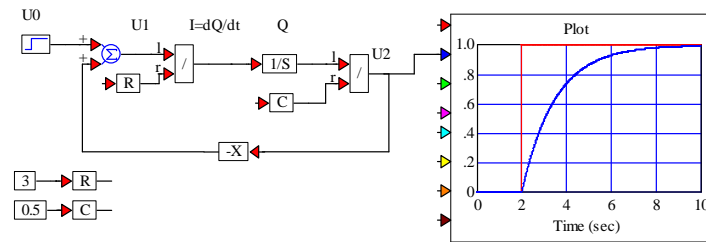


Abbildung 7: Simulation eines einfachen Tiefpasses. Die Differenz aus U_0 und U_1 ergibt die Spannung über dem Widerstand, aus der mit Hilfe von $I = U/R$ der Stromfluss I errechnet werden kann. Dieser wird integriert, so daß man die bis zum aktuellen Zeitpunkt in den Kondensator geflossene Ladung Q erhält. Aus dieser Ladung ermittelt man über $U = Q/C$ die am Kondensator abfallende Spannung U_2 , welche negiert rückgekoppelt wird.

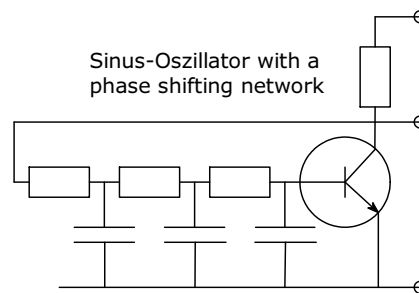


Abbildung 8: Elektronisches Schaltbild eines Phasenschieber-Netzwerkes mit einem Transistor als verstärkendes Element.

Dies ist nun eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Noch etwas umgestellt erhalten wir:

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}$$

Abbildung 7 beschreibt die Simulation eines Tiefpasses. Mit drei hintereinander geschalteten Tiefpässen kann ein sog. Phasenschieber-Netzwerk realisiert werden mit dem sich z.B. ein Sinusoszillator aufbauen lässt. Abbildung 8 zeigt das elektronische Schaltbild, Abbildung 9 eine Simulation.

2.2 harmonischer Oszillator - Feder

Abbildung 10 zeigt einen Körper mit Masse m an einer Feder. Auf diesen Körper wirken zwei entgegengesetzte Kräfte: Die Gravitationskraft $F_1 = -mg$ und die Federkraft $F_2 = kx$. Die Federkraft ist proportional der Länge

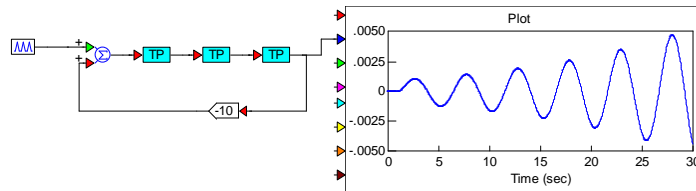


Abbildung 9: Simulation eines Phasenschiebernetzwerkes. Ein Nadelimpuls regt den Schwingkreis initial an. Durch die recht starke Dämpfung in den Tiefpässen ist ein hoher Verstärkungsfaktor nötig.

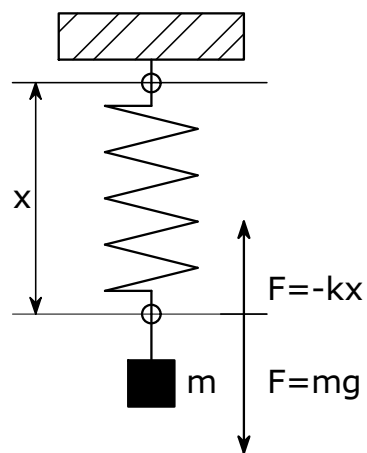


Abbildung 10: Eine Feder mit Masse m unter Schwerkräfteinfluss.

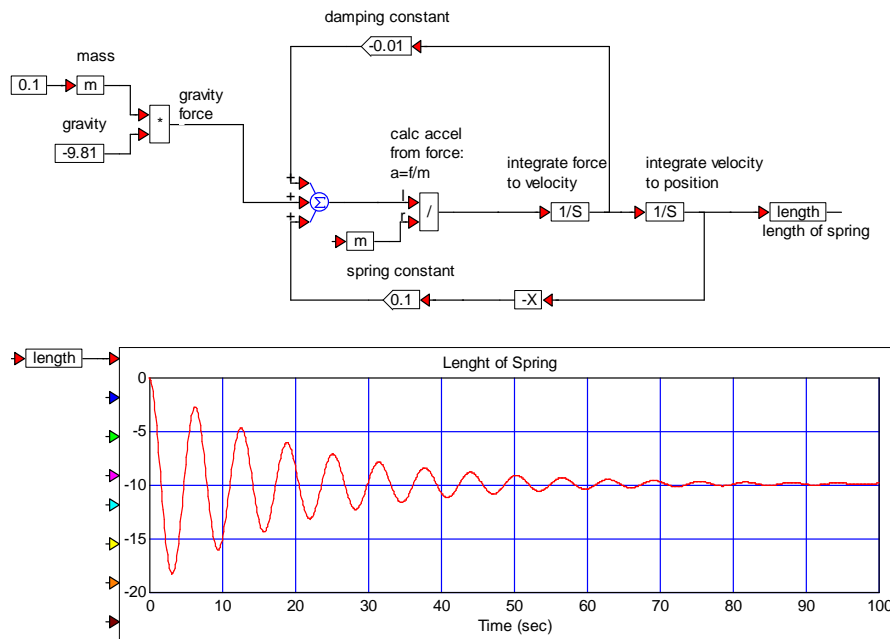


Abbildung 11: Simulation einer gedämpften Feder. Die einzelnen Kräfte werden aufsummiert und zweifach integriert, dies liefert die Position des Körpers mit Masse m . diese Position bestimmt gleichzeitig die Dehnung der Feder und somit die Federkraft, welche rückgekoppelt wird.

der Feder x . Hinzu kommt noch eine Reibungskraft (Reibung in der Feder und Luftwiderstand des Körpers). Von dieser Reibungskraft sei angenommen, daß sie in guter näherung proportional der Geschwindigkeit ist, mit der sich die Feder und der Körper bewegt. Alle drei Kräfte summieren sich und bewirken nach dem 2. Newtonschen Gesetz eine Beschleunigung des Körpers: $m\ddot{x} = F_1 + F_2 + F_3$. Damit können wir gleich die Differentialgleichung hinschreiben:

$$\ddot{x} = \frac{k_1}{m}x - \frac{k_2}{m}\dot{x} - g$$

Abbildung 11 zeigt die simulierte Feder.

2.3 Mehrkörpersysteme

Mehrkörpersysteme werden durch Kraftkopplung mehrerer Körper untereinander z.B. über Federn gebildet. Aufwendige Mehrkörper - Simulationssysteme erlauben die Kraftkopplung verschiedener geometrischer Grundobjekte über diverse Gelenke, welche die Bewegung der Körper in bestimmten Richtungen einschränken. Die geometrischen Grundobjekte können dabei weiterhin als Massepunkt simuliert werden, da sich bei ihnen ein Massezentrum

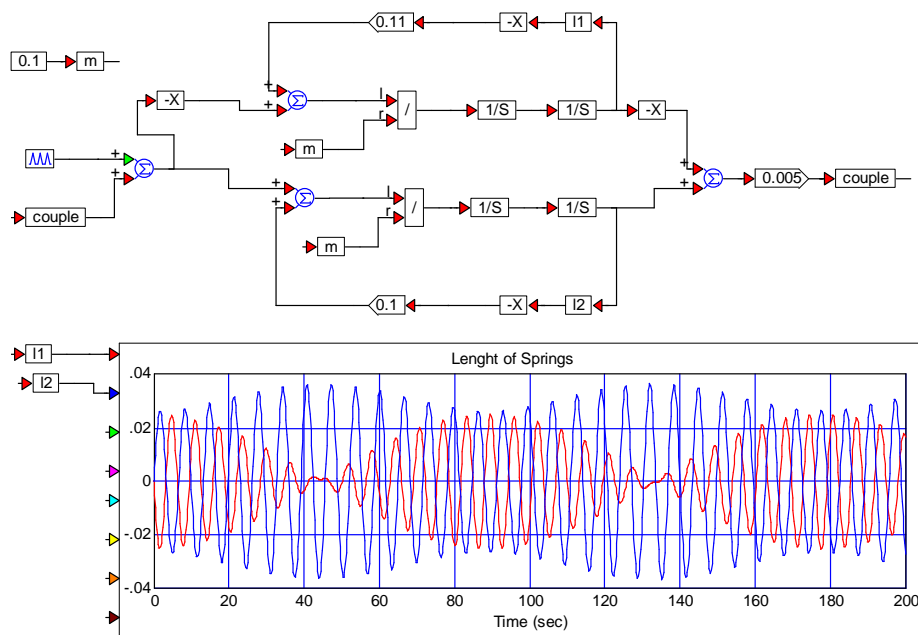


Abbildung 12: Simulation zweier gekoppelter Federschwinger. Im Plot erkennt man den zwischen beiden Federschwingern stattfindenden Energieaustausch an der schwankenden Amplitude.

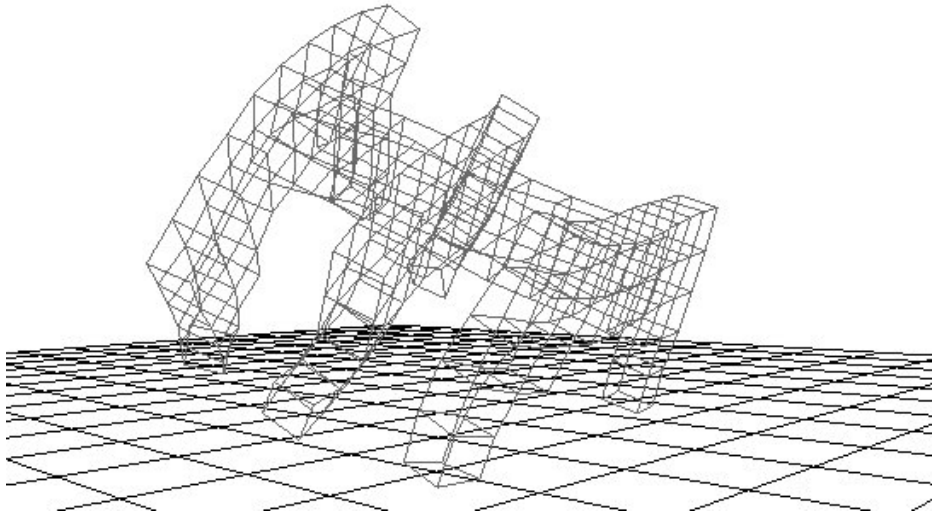


Abbildung 13: Simulation eines elastischen Körpers. Die Massepunkte wurden in einem dreidimensionalen Gitter angeordnet und untereinander durch steife Federn verknüpft.

(centre of mass) berechnen läßt. Ein simples Mehrkörpersystem erhält man schon, wenn zwei Federschwinger oder Pendel über eine dritte Feder gekoppelt werden. Es erfolgt dann bei schwacher Kopplung ein langsamer, steter Energieaustausch zwischen den beiden Schwingern. Abbildung 12 zeigt eine entsprechende Simulation.

Koppelt man Massepunkte eines dreidimensionalen Gitters untereinander mit recht steifen Federn, so kann man auf diese Weise recht realistisch elastische Körper simulieren, wie Abbildung 13 zeigt.

3 Probleme numerischer Simulationen

Vor allem Mehrkörper - Simulationssysteme leiden unter numerischen Ungenauigkeiten, welche sich schnell explosionsartig aufsummieren können. Als Beispiel sei die Simulation einer Kreisbewegung angeführt. Ein Massepunkt wird über eine Feder, welche im Ursprung $(0,0)$ festgemacht ist, auf eine Kreisbahn gezwungen (bei anderen Startbedingungen kann die Flugbahn auch elliptisch sein). Durch numerische Ungenauigkeiten, welche vor allem durch den diskreten Zeitschritt hervorgerufen werden, bewegt sich der Massepunkt tangential immer ein wenig mehr von der idealen kreisförmigen Flugbahn weg, so dass sich eine spiralförmige Flugbahn ergibt. Abbildung 14 verdeutlicht dies.

Abbildung 15 zeigt die Abhängigkeit der Flugbahn von der Zeitschritt-

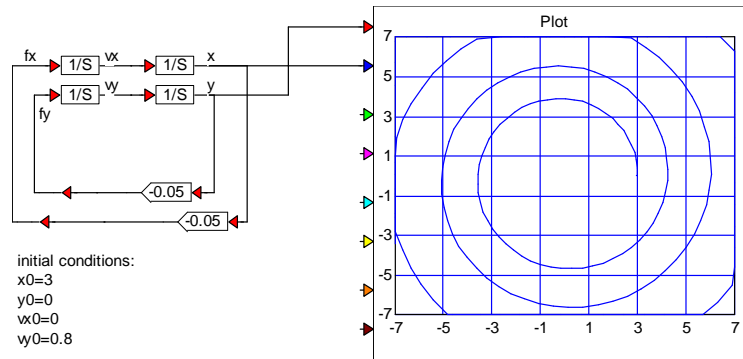


Abbildung 14: Simulation eines Massepunktes, welcher durch eine Feder auf eine Kreisbahn gezwungen wird. Zeitschrittweite $\Delta t = 0.5$ (2Hz)

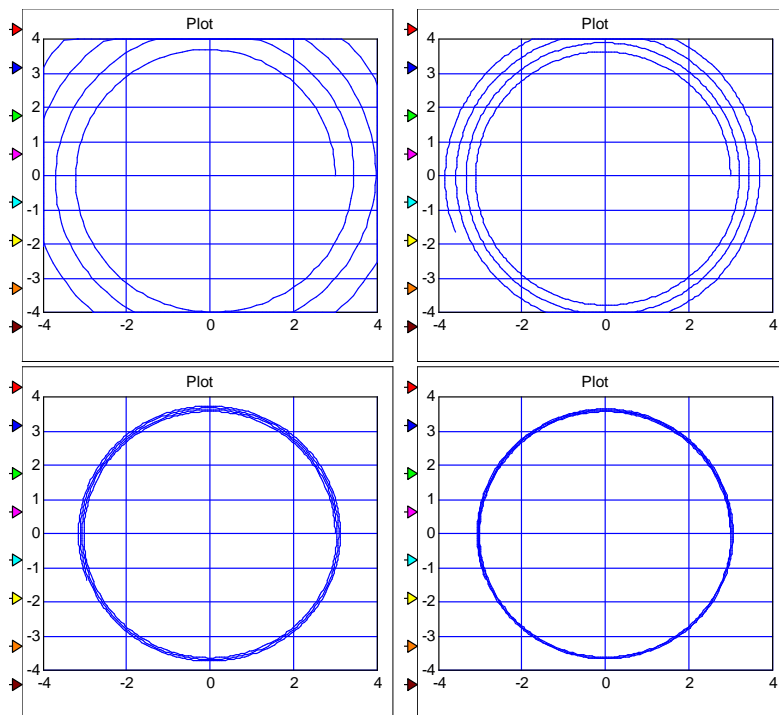


Abbildung 15: Dieselbe Simulation mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten. Integrationsmethode: Euler, v.l.n.r und v.o.n.u: 5 Hz, 10 Hz, 50 Hz, 100 Hz

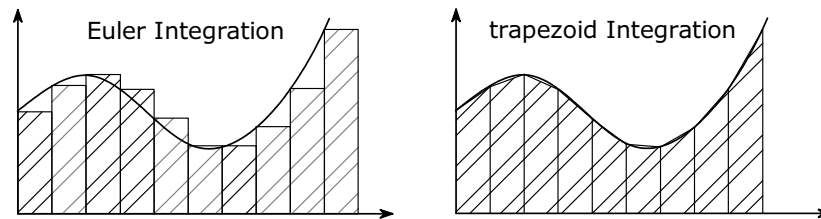


Abbildung 16: Euler-Integration im Vergleich zu trapezoider Integration. Der Genauigkeitsgewinn bei trapezförmiger Approximation der Integralfläche ist offensichtlich.

weite für die einfache numerische Euler-Integration (konstante Zeitschrittweite, einfache Summation der Anstiege). Wie man sieht, erlaubt die Euler-Integration erst bei sehr kleinen Zeitschrittweiten eine ausreichend exakte Simulation. Dies geht zu Lasten der Rechenzeit und der begrenzten Auflösung der verwendeten Gleitkommazahlen. Deshalb wurden mehrere Integrationsverfahren entwickelt, die eine wesentlich höhere Integrationsgenauigkeit besitzen. Ein sehr einfaches ist die trapezförmige Integration, welche eine um Größenordnungen bessere Integrationsgenauigkeit liefert, siehe Abbildung 16.

Literatur

- [For84] Otto Forster. *Analysis 2 - Differentialrechnung im \mathbf{R}^n Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1984.